Понятия

1 вопрос

Логарифмом положительного числа b по основанию a (a>0, a>1) называется показатель степени c, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

$\log_a b = c$ $a>0, \neq 1$	$<=>$	$a^c = b$ $b > 0$

Свойства логарифмов:

$$1.\ log_a(1) = 0;$$

$$2.\ log_a(a) = 1;$$

$$3.\ log_a(b * c) = log_a(b) + log_a(c);$$

$$4.\ log_a(\frac{b}{c}) = log_a(b) - log_a(c);$$

$$5.\ log_a(b^m) = m * log_a(b);$$

$$6.\ log_{a^m}(b) = \frac{1}{m} * log_a(b);$$

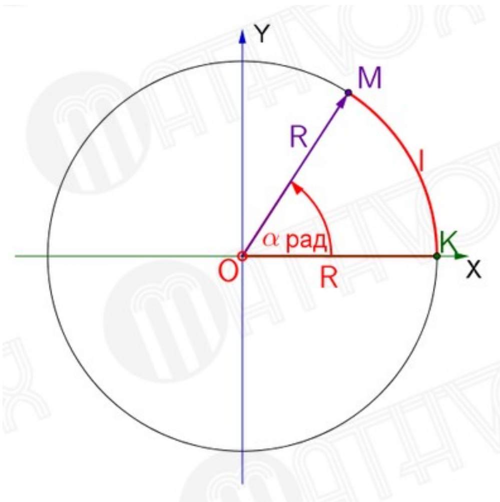
$$7.\ log_a(b) = \frac{log_c(b)}{log_c(a)},;\ b > 0;\ c > 0;\ c \neq 1;$$

$$8.\ log_a(b) = \frac{1}{log_b(a)};$$

$$9.\ a^{log_a(b)} = b.$$

2 вопрос

Определение радиана: α=l/r



Связь между градусами и радианами:

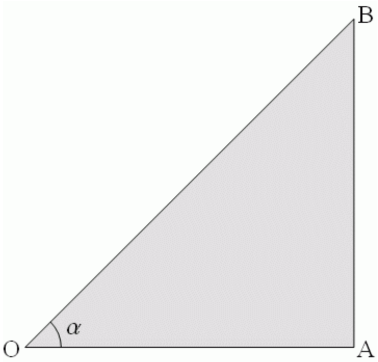
Связь между градусами и радианами будет установлена, если будет известна и градусная и радианная мера какого-нибудь угла (с градусной и радианной мерой угла можно ознакомиться в разделе).

Возьмем центральный угол, опирающийся на диаметр окружности радиуса r . Мы можем вычислить меру этого угла в радианах: для этого нам нужно длину дуги разделить на длину радиуса окружности. Этому углу соответствует длина дуги, равная половине *длины окружности* , то есть, . Разделив эту длину на длину радиуса r , получим радианную меру взятого нами угла. Таким образом, наш угол равен рад. С другой стороны, этот угол развернутый, он равен 180 градусам. Следовательно, пи радианов есть 180 градусов.

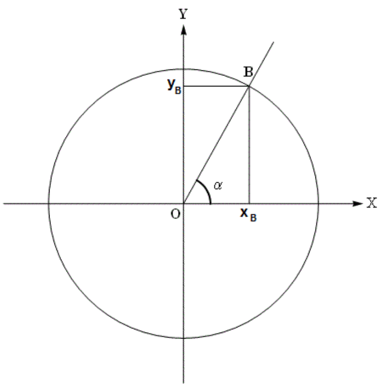
Итак, выражается формулой π радианов = 180 градусов , то есть, $\pi\ рад = 180^\circ$.

Вопрос 3

- синусом угла α называется отношение $\frac{AB}{OB}$ (отношение противолежащего катета к гипотенузе);
- косинусом угла α называется отношение $\frac{OA}{OB}$ (отношение прилежащего катета к гипотенузе);
- тангенсом угла α называется отношение $\frac{AB}{OA}$ (отношение противолежащего катета к прилежащему);
- котангенсом угла α называется отношение $\frac{OA}{AB}$ (отношение прилежащего катета к противолежащему);
- секансом угла α называется отношение $\frac{OB}{OA}$ (отношение гипотенузы к прилежащему катету);
- косекансом угла α называется отношение $\frac{OB}{AB}$ (отношение гипотенузы к противолежащему катету).



- Синусом называется отношение $\sin\alpha = \frac{y_B}{R}$.
- Косинусом называется отношение $\cos\alpha = \frac{x_B}{R}$.
- Тангенс определяется как $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_B}{x_B}$.
- Котангенс определяется как $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x_B}{y_B}$.
- Секанс определяется как $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{R}{x_B}$.
- Косеканс определяется как $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{R}{y_B}$.



Вопрос 4

Определение.

Арксинус числа ***a∈[−1, 1]*** – это угол *−90°≤a≤90°* (*−п/2≤a≤п/2*), синус которого равен *a*.

Аналогично определяются арккосинус, арктангенс и арккотангенс.

Определение.

Арккосинус числа ***a∈[−1, 1]*** – это угол *0°≤a≤180°* (*0≤a≤п*), косинус которого равен *a*.

Определение.

Арктангенс числа ***a∈(−∞, +∞)*** – это угол *−90°<a<90°* (*−п/2<a<п/2*), тангенс которого равен *a*.

Определение.

Арккотангенс числа ***a∈(−∞, +∞)*** – это угол *0°<a<180°* (*0<a<п*), котангенс которого равен *a*.

Вопрос 5

Функция — это зависимая переменная величина. Аргумент — это независимая переменная. Зависимость функции от аргумента называется функциональной зависимостью. Если нужно указать на тот факт, что y функция от x, не акцентируя внимания на то, в какой именно зависимости находится функция от аргумента, то пишут просто:

Совокупность всех тех значений, которые принимает аргумент x функции y = f (x), называется областью определения этой функции. Совокупность всех тех значений, которые принимает сама функция y, называется областью изменения этой функции

Вопрос 6

Монотонность

Монотонная функция – это функция, которая всё время либо возрастает, либо убывает.

Функция $y = f(x)$ называется **строго возрастающей на промежутке**, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции, т.е.

$$f(x)\uparrow: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Функция $y = f(x)$ называется **строго убывающей на промежутке**, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции, т.е.

$$f(x)\downarrow: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Функция $y = f(x)$ называется **неубывающей на промежутке**, если из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Функция $y = f(x)$ называется **невозрастающей на промежутке**, если из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Определение

Функция f называется **ограниченной на множестве** E, если найдется такое число $M > 0$, что для любого $x \in E$ справедлива оценка $|f(x)| < M$.

Функция f называется **ограниченной сверху на множестве** E, если найдется такое число M, что для любого $x \in E$ справедлива оценка $f(x) < M$.

Функция f называется **ограниченной снизу на множестве** E, если найдется такое число m, что для любого $x \in E$ справедлива оценка $f(x) > m$.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется **ограниченной сверху**, если множество её значений ограниченно сверху. Иначе говоря, функция f ограничена сверху, если существует такая постоянная M, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant M.$$

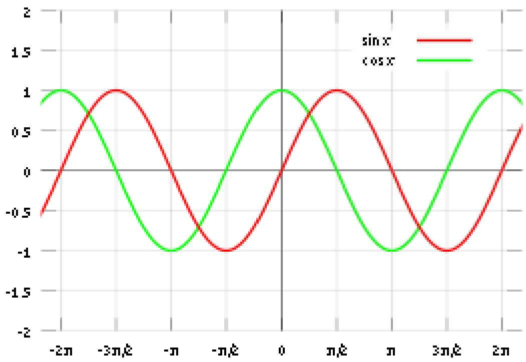
Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ограниченной снизу, если множество её значений **ограниченно снизу**, то есть, если существует такая постоянная m, что для каждого $x \in X$ выполняется неравенство

$$m \leqslant f(x).$$

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется **ограниченной**, если множество её значений ограниченно как сверху, так и снизу.

Вопрос 7

Периодическая фу́нкция — функция, повторяющая свои значения через некоторый регулярный интервал аргумента, то есть не меняющая своего значения при добавлении к аргументу некоторого фиксированного ненулевого числа (пери́ода функции) на всей области определения.



Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число T, не равное нулю, что для любого x из ее области определения $f(x+T) = f(x)$.

Другими словами, это функция, значения которой не изменяются при добавлении к значениям её аргумента некоторого фиксированного ненулевого числа T. Число T называется **периодом** функции. Как правило, говоря о периоде, мы имеем в виду наименьший положительный период функции.

Например, $y = sinx$, $y = cosx$, $y = tgx$, $y = ctgx$ — периодические функции.

Для функций $y = sinx$ и $y = cosx$ период $T = 2\pi$.

Для функций tgx и $y = ctgx$ период $T = \pi$.

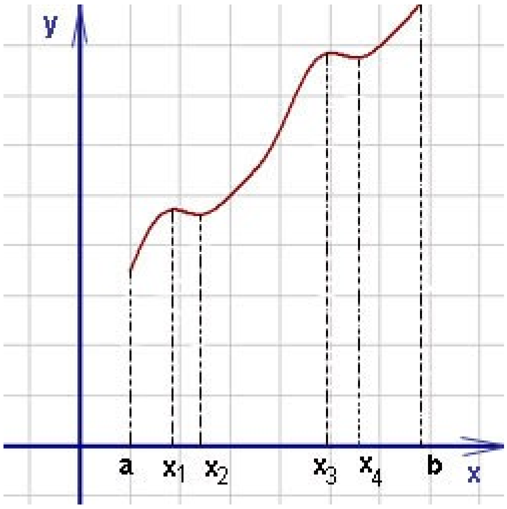
Но не только тригонометрические функции являются периодическими. Если вы учитесь в матклассе или на первом курсе вуза — вам могут встретиться вот такие задачи:

Вопрос 8

Четная и нечетная функция

Вопрос 9

Точка x_1 области определения функции f(x) называется точкой максимума функции, если значение функции в этой точке больше значений функции в достаточно близких к ней точках, расположенных справа и слева от неё (то есть выполняется неравенство $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$). В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_1 максимум.



Точка x_2 области определения функции f(x) называется точкой минимума функции, если значение функции в этой точке меньше значений функции в достаточно близких к ней точках, расположенных справа и слева от неё (то есть выполняется неравенство $f(x_0) < f(x_0 + \Delta x)$). В этом случае говорят, что функция имеет в точке x_2 минимум.

Допустим, точка x_1 - точка максимума функции f(x). Тогда в интервале до x_1 функция возрастает, поэтому производная функции больше нуля (f '(x) > 0), а в интервале после x_1 функция убывает, следовательно, и производная функции меньше нуля (f '(x) < 0). Тогда в точке x_1 производная функции равна нулю или не существует.

Допустим также, что точка x_2 - точка минимума функции f(x). Тогда в интервале до x_2 функция убывает, а производная функции меньше нуля (f '(x) < 0), а в интервале после x_2 функция возрастает, а производная функции больше нуля (f '(x) > 0). В этом случае также в точке x_2 производная функции равна нулю или не существует.

Теорема Ферма (необходимый признак существования экстремума функции). Если точка x_0 - точка экстремума функции f(x), то в этой точке производная функции равна нулю (f '(x) = 0) или не существует.

Определение. Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются критическими точками.

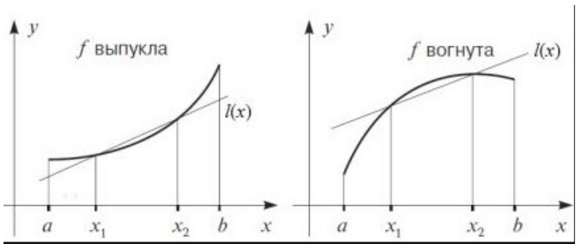
Итак, чтобы определить точки экстремума функции, требуется выполнить следующее:

- Найти производную функции.
- Приравнять производную нулю и определить критические точки.
- Мысленно или на бумаге отметить критические точки на числовой оси и определить знаки производной функции в полученных интервалах. Если знак производной меняется с "плюса" на "минус", то критическая точка является точкой максимума, а если с "минуса" на "плюс", то точкой минимума.
- Вычислить значение функции в точках экстремума.

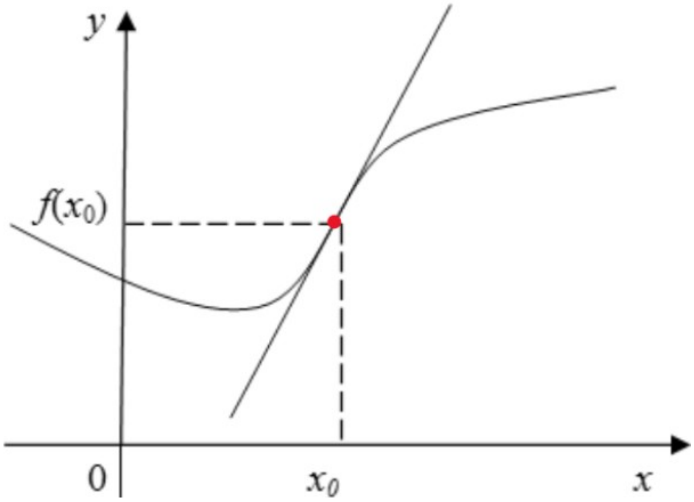
Вопрос 10

Дифференцируемая функция называется выпуклой вниз на интервале X, если ее график расположен не ниже касательной к нему в любой точке интервала X.

Дифференцируемая функция называется выпуклой вверх на интервале X, если ее график расположен не выше касательной к нему в любой точке интервала X.



Точка называется точкой перегиба графика функции y=f(x), если в данной точке существует касательная к графику функции (она может быть параллельна оси O_y) и существует такая окрестность точки формула, в пределах которой слева и справа от точки M график функции имеет разные направления выпуклости.



Вопрос 11

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ПОНЯТИЕ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Числовая последовательность (a_n) — зависимость, ставящая в соответствие каждому натуральному числу некоторое действительное число.

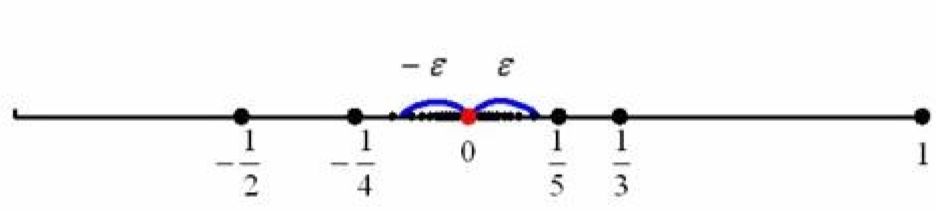
Члены последовательности — числа, образующие последовательность: a_1, a_2, a_3 и т. д., a_n — n-й член последовательности.

Способы задания последовательности:

- формула n-го члена;
- рекуррентная формула, с помощью которой любой член последовательности, начиная с некоторого, вычисляется через предыдущие члены.

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ	ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ
Определение	
Числовая последовательность (a_n), в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d: $a_{n+1} = a_n + d$, d — **разность** прогрессии	Числовая последовательность (b_n), в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q: $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$ — **знаменатель** прогрессии
Формула для разности	**Формула для знаменателя**
$d = a_{n+1} - a_n$	$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$
$d < 0$, (a_n) — убывающая, $d > 0$, (a_n) — возрастающая, $d = 0$, (a_n) — постоянная.	$q > 0$, $q \neq 1$, (b_n) — монотонная, $q = 1$, (b_n) — постоянная, $q < 0$, (b_n) — знакопеременная, $\lvert q \rvert < 1$, (b_n) — бесконечная.
Формулы n-го члена	
$a_n = a_1 + (n-1)d = a_k + (n-k)d$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = b_k \cdot q^{n-k}$
Формулы суммы n первых членов	
$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$, $q \neq 1$ При $q = 1$ $S_n = n \cdot b_1$
Характеристическое свойство	
Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия тогда и только тогда, когда для любого a_n, $n \geqslant 2$: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$	Последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия тогда и только тогда, когда для любого b_n: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$
Сумма первых n натуральных чисел	**Сумма бесконечной прогрессии**
$S = \frac{n(n+1)}{2}$	$S = \frac{b_1}{1-q}$, $\lvert q \rvert < 1$

Вопрос 12



Теперь зажмите синюю окрестность рёбрами ладоней и начинайте её уменьшать, стягивая к пределу (красной точке). Число является пределом последовательности, если ДЛЯ ЛЮБОЙ заранее выбранной -окрестности (сколь угодно малой) внутри неё окажется бесконечно много членов последовательности, а ВНЕ неё – лишь конечное число членов (либо вообще ни одного). То есть эпсилон-окрестность может быть микроскопической, да и того меньше, но «бесконечный хвост» последовательности рано или поздно обязан полностью зайти в данную окрестность.

Пригласим на танец незамысловатую подругу $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$:

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$

Что происходит, когда «эн» увеличивается до бесконечности? Очевидно, что члены последовательности будут *бесконечно близко* приближаться к нулю. Это и есть предел данной последовательности, который записывается следующим образом:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$$

Вопрос 13

Бесконечно малая — числовая функция или последовательность, стремящаяся к (предел которой равен) нулю.

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Бесконечно большая — числовая функция или последовательность, стремящаяся к (предел которой равен) бесконечности определённого знака.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Из двух предыдущих свойств вытекает связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями.

> Если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

> Если функция $\alpha(x)$ являются бесконечно малой при $x \to x_0$, и $\alpha(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to x_0$.

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой функцией можно выразить символическим образом:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \quad \frac{1}{0} = \infty.$$

Вопрос 14

Определение

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется **непрерывной в этой области**.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной справа в точке** α, если $f(a+0)=\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a)$.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева в точке** α, если $f(a+0)=\lim_{x\to a-0} f(x)=f(a)$.

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной в интервале** $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной на отрезке** $[a;b]$, если она является непрерывной в интервале $(a;b)$, непрерывной справа в точке α, то есть $f(a+0)=f(a)$ и непрерывной слева в точке b, то есть $f(b-0)=f(b)$.

Теорема Вейерштрасса. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения.

Вопрос 15

Производной (первой производной) f' (x) функции f(x) в точке хо называется предел отношения

- приращения функции $\Delta f(x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
- к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Свойства

Если у функций $f(x)$ и $g(x)$ существуют производные, то

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$$
$$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$$
$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+g'(x)f(x)$$
$$(Cf(x))'=Cf'(x),\ \text{где } C - \text{const}$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}\quad (g(x)\neq 0)$$

- Если у функции ***y= f (g (x))*** существуют производные ***f'***$_g$ и ***g'***$_x$, то :
    - $$y'_x = f'_g \cdot g'_x$$
- где индексы g и х указывают, по какому аргументу вычисляются производные функции.

Физический смысл производной

- Если точка движется вдоль оси ***x*** и ее координата изменяется по закону ***x (t)***, то мгновенная скорость точки:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = x'(t),$$

- а укорение (мгновенное ускорение):

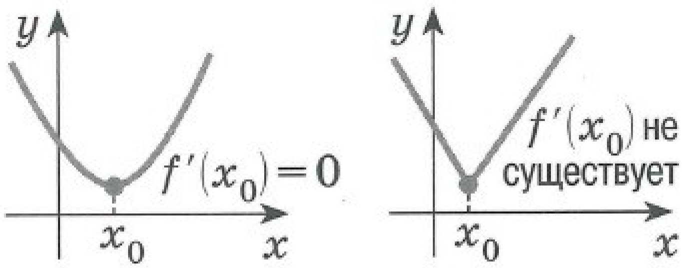
$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = v'(t) = x''(t).$$

Производные элементарных функций

$f(x)=c, c=\text{const}$	$f'(x)=0$	$f(x)=ax+b$	$f'(x)=a$
$f(x)=x^2$	$f'(x)=2x$	$f(x)=x^3$	$f'(x)=3x^2$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=x^a$	$f'(x)=a^x \ln x$	$f(x)=a^x$	$f'(x)=ax^{a-1}$
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}$	$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$	$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\operatorname{tg} x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$f(x)=\operatorname{ctg} x$	$f'(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x)=\arcsin x$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$f(x)=\arccos x$	$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\operatorname{arctg} x$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$f(x)=\operatorname{arcctg} x$	$f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$

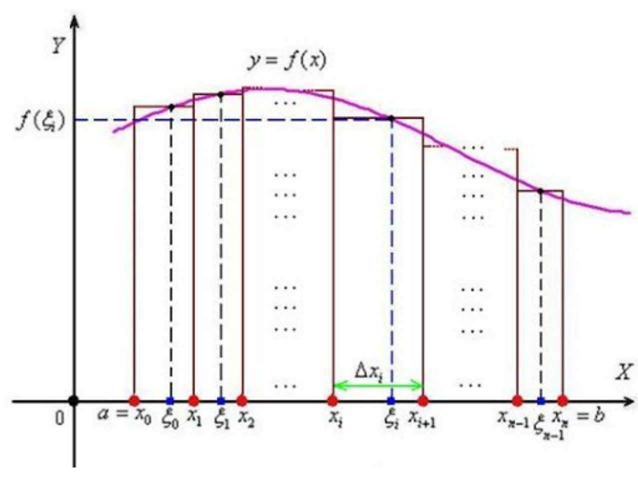
Производная функции. Необходимое условие экстремума:

Если x_0 - точка экстремума некоторой функции f (x), то эта точка является критической точкой данной функции, т.е. в данной точке производная либо равна нулю, любо не существует.



Вопрос 16

Неопределённый интегра́л для функции f(x) — это совокупность всех первообразных данной функции.



Таким образом, если F - некоторая частная первообразная, то справедливо выражение

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная.

Свойства интегралов

- $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
- $\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$
- $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

Таблица интегралов

$\int a dx = ax + C$	$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$
$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$	$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\int \sec x dx = \ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$\int \csc x dx = \ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + C$	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$	$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$
$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}\lvert x\rvert + C$	$\int \sinh x dx = \cosh x + C$
$\int \cosh x dx = \sinh x + C$	$\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C$
$\int \operatorname{csch}^2 x dx = -\coth x + C$	$\int \operatorname{sech} x \tanh x dx = -\operatorname{sech} x + C$
$\int \operatorname{csch} x \coth x dx = -\operatorname{csch} x + C$	$\int \tanh x dx = \ln\cosh x + C$

Вопрос 17

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная неотрицательная функция y = f(x). Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная сверху графиком функции y = f(x), снизу – осью Ox, слева и справа – прямыми x = a и x = b (рис. 2).

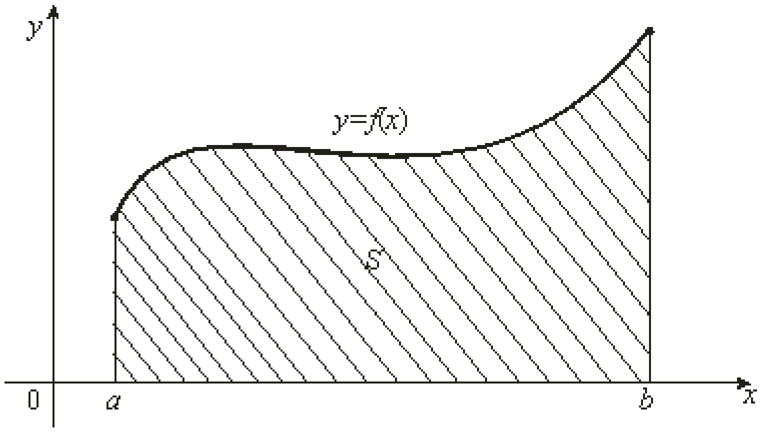


Рис. 2

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Определенный интеграл от неотрицательной функции y = f(x) с геометрической точки зрения равен площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции y = f(x), слева и справа – отрезками прямых x = a и x = b, снизу – отрезком оси Ox.

Прежде чем перейти к **основным свойствам определенного интеграла**, условимся, что *a* не превосходит *b*.

1. Для функции *y = f(x)*, определенной при *x = a*, справедливо равенство $\int_a^a f(x)dx = 0$.

   То есть, значение определенного интеграла с совпадающими пределами интегрирования равно нулю. Это свойство является следствием определения интеграла Римана, так как в этом случае каждая интегральная сумма σ для любого разбиения промежутка *[a; a]* и любого выбора точек ξ_i равна нулю, так как $x_i - x_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$, следовательно, пределом интегральных сумм является ноль.

2. Для интегрируемой на отрезке *[a; b]* функции выполняется $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

   Другими словами, при перемене верхнего и нижнего пределов интегрирования местами значение определенного интеграла меняется на противоположное. Это свойство определенного интеграла также следует из понятия интеграла Римана, только нумерацию разбиения отрезка следует начинать с точки *x = b*.

3. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ для интегрируемых на отрезке *[a; b]* функций *y = f(x)* и *y = g(x)*.

Формула Ньютона-Лейбница - даёт соотношение между операциями взятия определенного интеграла и вычисления первообразной. Формула Ньютона-Лейбница - основная формула интегрального исчисления.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Вопрос 18

Достоверное событие обозначается символом – W.

Невозможное событие никогда не происходит в результате наблюдения или испытания.

Невозможное событие обозначается символом – Æ.

Пример. Если в корзине только персики, то достать из корзины персик является достоверным событием, а достать лимон является невозможным событием.

Случайное событие – это такое событие, которое в результате наблюдения или испытания может произойти, а может и не произойти.

Кроме того, события могут быть **совместными и несовместными**, зависимыми или независимыми. Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании. Примеры совместных событий: два стрелка стреляют по мишени, два спортсмена одновременно бегут. Случайные события А и В называются несовместными, если при данном испытании появление одного из них исключает появление другого события. Несовместные события: день и ночь, студент одновременно едет на занятие и сдаёт экзамен, число иррациональное и чётное.

Вопрос 19

Случайной величиной называется переменная, которая может принимать те или иные значения в зависимости от различных обстоятельств, и в свою очередь, случайная величина называется дискретной, если множество её значений конечно или счётно.

Примерами дискретных случайных величин с конечным числом значений могут служить число родившихся детей в течение дня в населённом пункте, число пассажиров автобуса, число пассажиров, перевезённых московским метро за сутки и т. п.

Внимание: новое, очень важное понятие теории вероятностей - ***закон распределения***. Пусть дискретная случайная величина *X* может принимать *n* значений: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Будем считать, что они все различны (в противном случае одинаковые должны быть объединены) и расположены в возрастающем порядке. Для полной характеристики дискретной случайной величины **должны быть заданы не только все её значения, но и веряности** $p_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$, с которыми случайная величина принимает каждое из значений, т. е. $p_i = P(X = x_i)$.

Законом распределения дискретной случайной величины называется любое правило (функция, таблица) *p*(*x*), позволяющее находить вероятности всевозможных событий, связанных со случайной величиной (например, вероятность того, что она пример какое-то значение или попадёт в какой-то интервал).

Наиболее просто и удобно закон распределения дискретной случайной величины задавать в виде следующей таблицы:

Значение	x_1	x_2	...	x_n
Вероятность	p_1	p_2	...	p_n

Такая таблица называется **рядом распределения дискретной случайной величины**. В верхней строке ряда распределения перечислены в порядке возрастания все возможные значения дискретной случайной величины (иксы), а в нижней - вероятности этих значений (*p*).

Математическим ожиданием M(X) случайной величины X называется число, равное сумме произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности:

$$M(X) = \sum_k x_k p_k \qquad (8.1)$$

где p_k – вероятность того, что величина X примет значение x_k. Если число возможных значений СВ бесконечно, то ряд в (8.1) должен сходиться абсолютно.

Свойства математического ожидания

1) Математическое ожидание постоянной есть постоянная:

$M(c) = c.$

2) Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания:

$M(cx) = cM(x).$

3) Математическое ожидание суммы (разности) равно сумме (разности) математических ожиданий слагаемых:

$M(x + y) = M(x) + M(y);$

$M(x - y) = M(x) – M(y);$

$M(x + c) = M(x) + c.$

4) Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий:

$M(xy) = M(x) \cdot M(y).$

Свойства дисперсии

1) $D(C) = 0$ (C – число).

2) Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$D(CX) = C^2D(X).$

3) Дисперсия суммы попарно независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$

4) $D(X = C) = D(X).$

5) $D(X – Y) = D(X) + D(Y).$

Для вычисления дисперсии более удобна формула

$D(X) = M(X^2) – (M(X))^2$

(дисперсия случайной величины равна математическому ожиданию квадрата случайной величины без квадрата ее математического ожидания), где

$$M(X^2) = \sum_k x_k^2 p_k.$$

Пример. Дана таблица распределения дискретной СВ X. Найти математические ожидания M(X), $M(X^2)$ и дисперсию D(X).

α	-2	0	2	4
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Среднее квадратическое отклонение случайной величины

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ случайной величины X называется квадратный корень из её дисперсии:

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$

Как и дисперсия, среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$ является числовой характеристикой степени рассеивания (отклонения) случайной величины от ее среднего значения. $\sigma(X)$ более удобно для оценки степени рассеивания, так как выражается теми же единицами, что и случайная величина.

Вопрос 20

Равносильными называются такие уравнения, имеющие одни и те же корни, или же те, в которых корней нет.

Равносильность уравнений.

И так какие же преобразования являются равносильными?

Теоремы о равносильности уравнений.

Все теоремы которые мы рассмотрим ниже, уже встречались нам начиная с самых ранних классов.

Теорема 1. Если какой либо член уравнения, перенести из одной части в другую, поменяв при этом знак на противоположный, то получится уравнение равносильное исходному.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну и туже нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Показательное уравнение

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \, (a > 0, a \neq 1)$$

равносильно уравнению f(x)=g(x).

Вопрос 21

Скрещивающиеся прямые — это прямые, которые не лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

Признак:

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся (не лежат в одной плоскости).

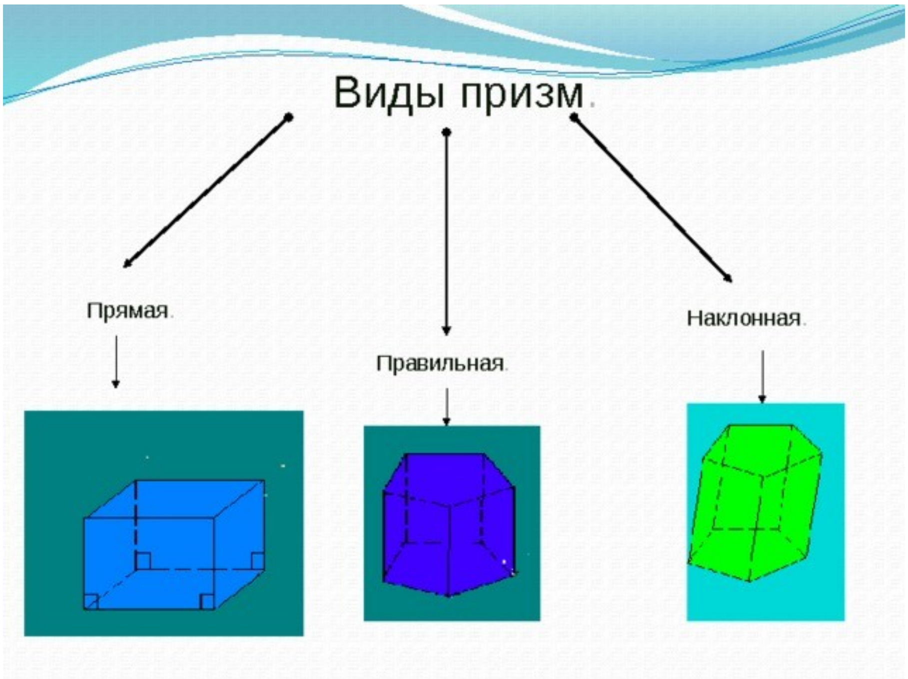
Вопрос 22

Двугранный угол — это часть пространства, заключённая между двумя полуплоскостями, имеющими одну общую границу.

Двугранные углы измеряются линейным углом, то есть углом, образованным пересечением двугранного угла с плоскостью, перпендикулярной к его ребру. Таким образом, чтобы измерить двугранный угол, можно взять любую точку на его ребре и перпендикулярно ребру провести из неё лучи в каждую из граней. Линейный угол между этими двумя лучами и будет равен по величине двугранному углу. Если один из лучей не перпендикулярен ребру, то величина линейного угла между лучами в общем случае будет отлична от величины двугранного угла. Например, в любой двугранный угол (в том числе больший 90 градусов) можно поместить прямой угол так, чтобы его вершина лежала на ребре двугранного угла, а стороны принадлежали его граням.

Вопрос 23

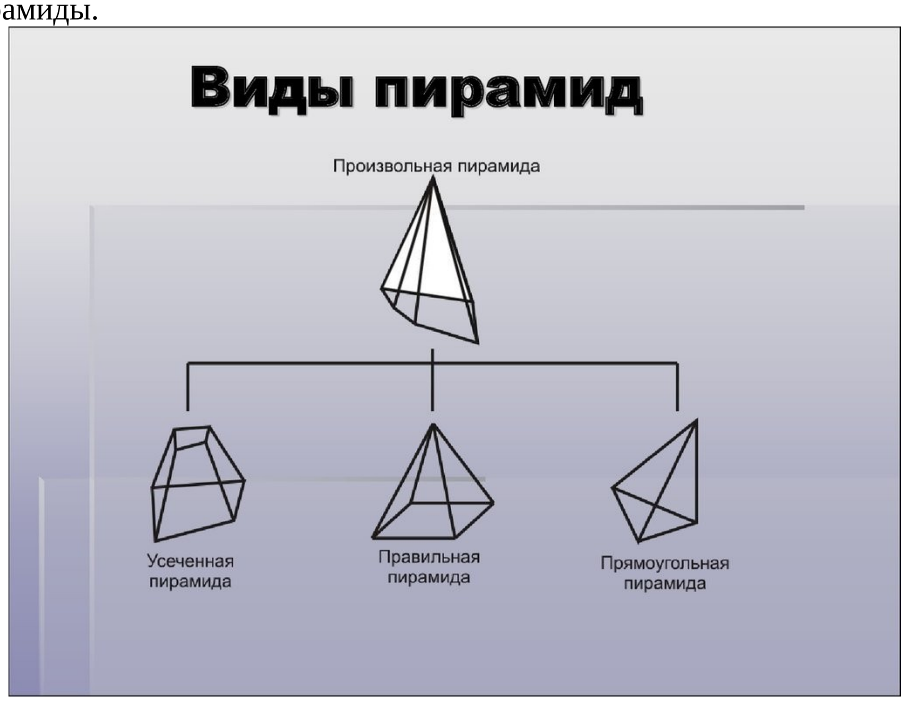
Призма — это многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, находящимися в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами.



Вопрос 23

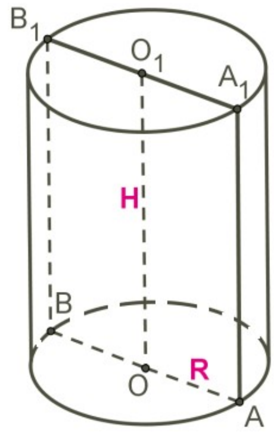
Многогранник, одна грань которого является n-угольником, а остальные грани — треугольники с общей вершиной, называется пирамидой, n-угольник называется основанием пирамиды, а треугольники — боковыми гранями.

Перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды.

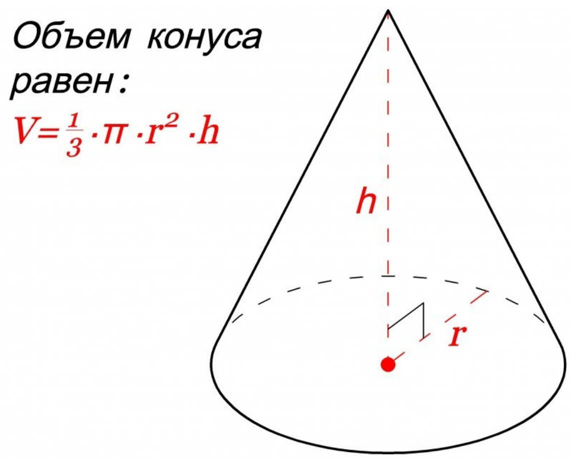


Вопрос 25

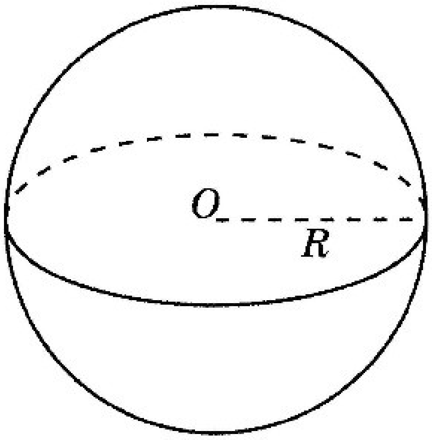
Цилиндром называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей его сторону.



Конусом называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет.



Шаром называется фигура, полученная при вращении полукруга вокруг оси, содержащей его диаметр.



Сферой называется поверхность шара.